

3. 利用者より

差分法による自由表面波の数値計算と計算環境

水産学部 海洋情報科学講座
塩谷 茂明

1 はじめに

本研究は、数値流体力学の中で重要な自由表面波問題に関し、航走する圧力分布が造る波の計算を示す。計算は粘性を考慮した二次元並びに三次元 Navier- Stokes 方程式を直接差分法で行うものである。計算スキームは MAC 法に準じた方法であり、自由表面近傍は正確に計算するために格子間隔を十分密にした物体適合座標を用いた。本方法の特徴は粘性を考慮していることと、圧力攪乱の形状と強さに制約されず任意の圧力分布が造る波の定常解が得られることと、さらに、流体内部の任意位置における速度分布も細部にわたり容易に得られることである。

この問題の応用として、船舶工学の分野では任意形状のホーバークラフトが造る波の計算が出来る。また、高速滑走艇が造る波の計算の場合、物体の水面攪乱を対応する圧力分布で置き換えることが出来れば、物体端部での複雑な境界条件を考慮しなくてすむ利点がある。この結果、艇の造波抵抗の推定や発生した波が遠方に伝播した際、他の航行船舶や海洋構造物に与える影響等の予測に役立ち得る。さらに、台風等の気象学的擾乱による海面隆起の推定等にも応用可能である。

この問題に関しては、解析的手法による計算はかなり以前から行なわれているが、これらのほとんどが、流体は非粘性であり、ラプラス方程式を解いたポテンシャル流れを解いたものであり、粘性を含む流体の数値計算を行なった例はほとんどない。

計算は長崎大学総合情報処理センターの大型計算機で行ったので、数値計算と計算機との関連についても若干述べる。

2 基礎方程式

流体は非圧縮性流体であり、粘性は考慮する。このとき、無次元化した三次元流れの基礎方程式は、次のような Navier-Stokes 方程式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3)$$

無次元化に使用した有次元物理量は圧力分布の長さ L' 、一様速度 C' 、自由表面上の負荷圧力 P' 、流体密度 ρ' 、時間 t' で、無次元量を次のように示した。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(速度)} & u = \frac{u'}{C'}, v = \frac{v'}{C'}, w = \frac{w'}{C'} \\ \text{(座標)} & x = \frac{x'}{L'}, y = \frac{y'}{L'}, z = \frac{z'}{L'} \\ \text{(圧力)} & P = \frac{P'}{\rho' C'^2} \\ \text{(時間)} & t = \frac{t'}{L'/C'} \end{array} \right. \quad (4)$$

Re はレイノルズ数 ($\frac{C' L'}{\nu}$)、 Φ は

$$\Phi = P + \frac{z}{Fn^2} \quad (5)$$

で定義される圧力であり、 Fn はフルード数 ($\frac{C'}{\sqrt{g L'}}$ 、 g は重力の加速度) である。また、無次元化した連続の式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

(1)、(2)、(3) 式を時間に関し一次前進差分近似で表わすと

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E \quad (7)$$

$$E = \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$\frac{v^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F \quad (9)$$

$$F = \frac{v^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$\frac{w^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = G \quad (11)$$

$$G = \frac{w^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (12)$$

となる。ここで添字 $n, n+1$ はそれぞれタイムステップを示している。(7) 式を x に、(9) 式を y に、そして (11) 式を z に関して偏微分して加えると、

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \nabla^2 \Phi + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right) \quad (13)$$

となる。(13) 式の右辺第 2 項の () 内は、MAC 法によると、(6) 式の連続の式よりゼロとしている。すると、(13) 式はポアソンの式で次のようになる。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = R \quad (14)$$

これを S.O.R 法による反復計算から Φ を求める。得られた Φ を (7)、(9)、(11) 式に代入すると、次のタイムステップ $n+1$ での流速 u^{n+1} 、 v^{n+1} 、 w^{n+1} が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \Delta t \left(E - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ v^{n+1} &= \Delta t \left(F - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ w^{n+1} &= \Delta t \left(G - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

水面上の波面計算は、任意水面 (x, y) での時刻 t の水面変位を $\eta_{(t, x, y)}$ とすると、次式で計算した。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (16)$$

三次元直交座標系 x, y, z と一般座標系 ξ, η, ζ との関係式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z, t) \\ \eta = \eta(x, y, z, t) \\ \zeta = \zeta(x, y, z, t) \\ \tau = t \end{cases} \quad (17)$$

(1)～(16) 式はこの関係を用いて一般座標系で計算を行う^{[1][2]}。

3 計算方法

計算は数値安定性のよい MAC 法に準じた方法を用いて差分法で行った。

図 1 は MAC 法に準ずる方法のアルゴリズムである。流速は加速しないで一様流速の平水面上に無次元時間 $T=0$ に突然圧力分布が負荷したとして計算を開始している。自由表面の計算は波面上に設置したマーカを各タイムステップ毎に計算した速度で移動させ (16) 式で計算している。そのため計算格子は波面計算後、各タイムステップ毎に再構成した。これにより、自由表面境界条件の計算は容易となり、高精度の波面計算が出来る。

図 2 は初期条件設定時 $T=0$ の二次元と三次元の計算格子を示している。格子は幾何学的に生成した物体適合座標である。三次元計算の場合、計算対象領域は圧力分布が造る波が流れ方向の圧力中心線に対し左右対称となるから、進行方向に対し左側半面とする。格子数は二次元の場合 x 方向に $I=300$ 、 z 方向に $K=30$ 、三次元では x 方向に $I=123$ 、 y 方向に $J=38$ 、 z 方向に $K=30$ である。格子間隔は水面付近は波の発生により詳細に計算する必要性からメッシュを密にし、自由表面に集中させた。

二次元計算では数値安定性のよいスタガードメッシュを用いたが、三次元の場合は計算容量の制約からレギュラーメッシュを用いた。そのため数値安定性をよくするため座標系

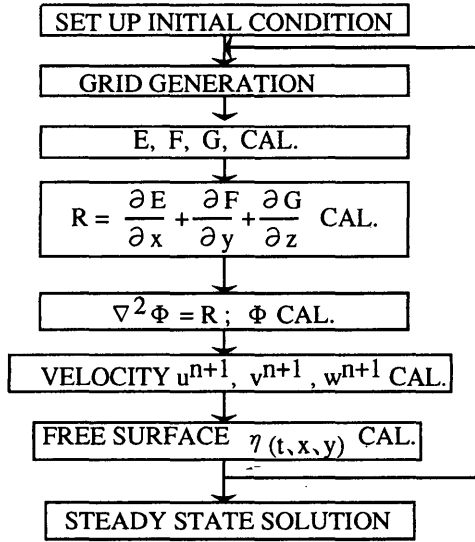


図 1 MAC 法のアルゴリズム

の計量項と圧力勾配項に対しては 4 次中心差分、運動方程式の対流項のみ 3 次風上差分を用いた。境界条件等詳細な事柄は紙面の都合上割愛する。

図 3 は計算に用いた二次元と三次元の自由表面上負荷圧力分布を示している。

4 計算結果

図 4 は計算波形である。無次元時間 $T=10$ まで計算した。圧力分布は二次元の場合紙面上左側に、三次元の場合左斜め上方向へ水面上を航走し、後方に波が発生している。特に三次元の場合、丘の上から眺めた船の航走波によく似ている。

図 5 は三次元波の等高線を示している。圧力分布中心線に対して両舷領域共対称に描いている。図中の実線は静止水面より正、点線は負の水面変位を示している。図 4 の鳥瞰図で見られた波の起伏の様子がよくわかる。

図 6 は二次元波中の速度ベクトル (u - w 成分)、三次元圧力分布後方の進行方向と直角なある断面 (Y - Z 面) での速度ベクトル (v - w 成分) を示している。特に乱れた部分もなく生成波の内部の流速分布の様子を十分表現しているものと思われる。

5 計算環境

計算容量はおよそ二次元波で 5 メガバイト、三次元波で 40 メガバイトである。三次元波の場合、ここで用いた計算格子はまだ粗く、精度良い計算を行うためにはさらに細かい格子が必要である。特に、本計算では流体中に物体がないのでこの程度の計算容量でも我慢できるが、船が造る波等の計算では船体表面の境界層や自由表面近傍の流れの様子を正確に把握するためには十分細かい計算格子が要求される。しかし、本計算機で個人が利用可能な最大メモリーは 50 メガバイトに制約されている。

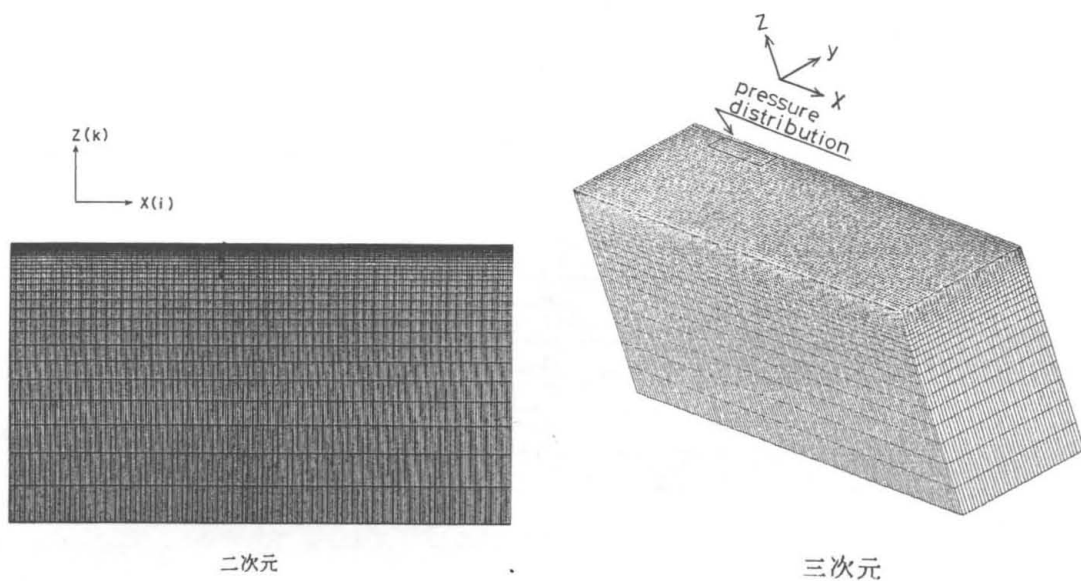


图 2 计算格子

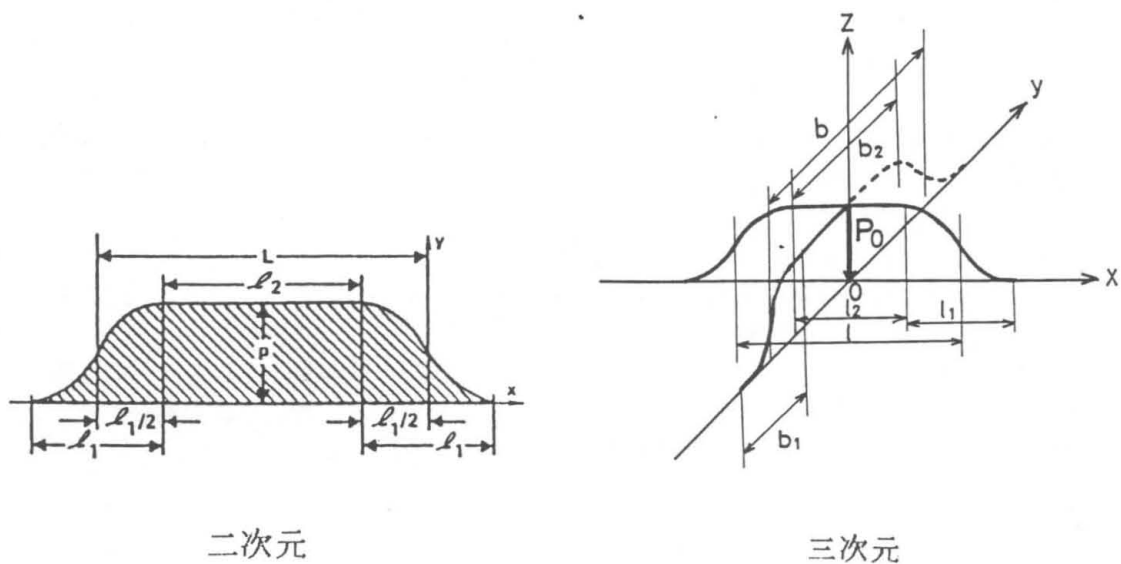
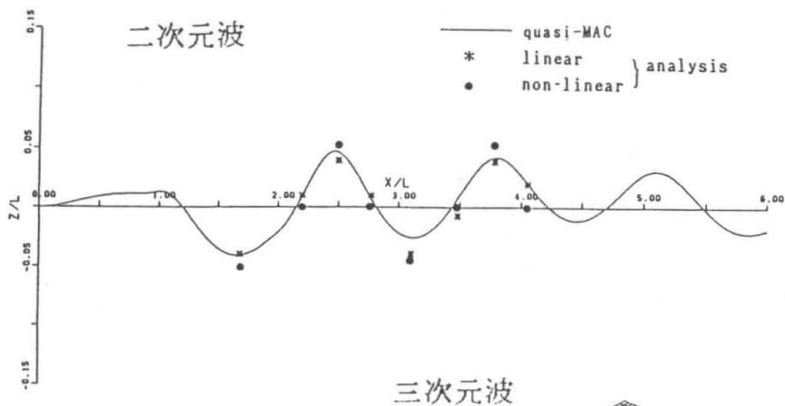
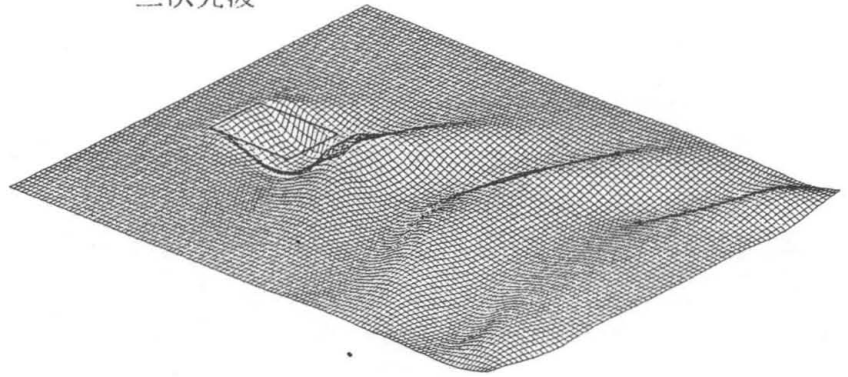


图 3 自由表面压力分布



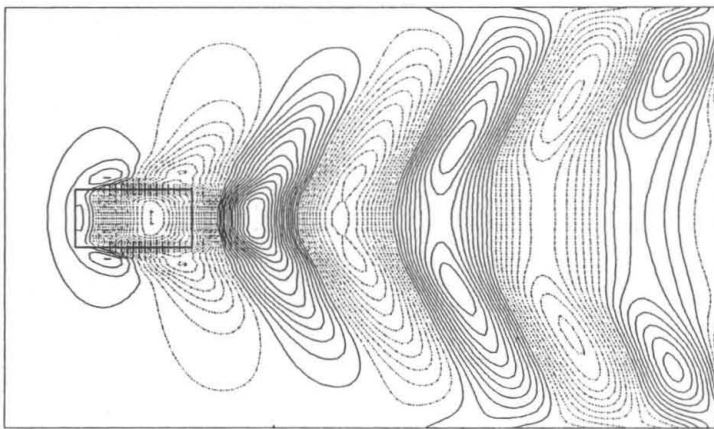
三次元波



$$F_n = 0.5$$

図 4 計算波形

三次元波



$$F_n = 0.5$$

図 5 三次元波の等波高線

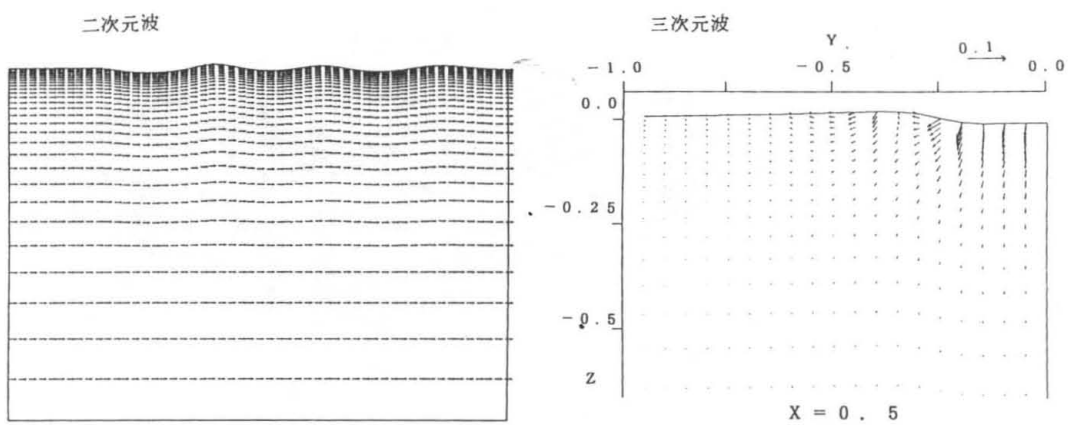


図 6 生成波中の速度ベクトル（二次元波は $(u-w)$ 、三次元波は $(v-w)$ 成分）

無次元時間 $T=10$ まで計算した時の計算時間 (CPU タイム) はおよそ二次元波で 1 時間 47 分 (新機種 VP1200 モデル 10 使用)、三次元波で 31 時間 48 分 (旧機種 FACOM M-760 使用) である。同じプログラムでベクトルプロセッサを利用した二次元波では 1 時間 13 分に短縮されたが、三次元波の場合はメモリーが大きいため現時点ではこれを利用できない環境である。新機種でこの三次元波の計算を行っていないので、どれだけ短縮されるか不明であるが、新機種でも CPU 時間環境は最大 16 時間と制限されているので、途中で計算を中断し、それまで計算した全てのデータを一度保存した後、新たに続行するといった煩雑さが起こる。また、計算途中で波の発生の様子を調べるために適当な時間ステップ毎に計算結果を磁気ディスクに格納しているが、1 ユーザ当たりの記憶容量が標準で 50 メガバイトであるためすぐに容量オーバーとなり、計算は中断される。幸いにも、著者の場合はセンターの御好意により 300 メガバイトまで利用可能であるが、それでも 2 ケースの計算しか連続して行うことが出来ない。

計算機使用料金に関しては CPU 時間で 1 秒当たり 0.5 円であるから、三次元波の計算の場合およそ 56,000 円になる。初期条件を変えた数ケースの計算を行おうとすると、忽ち研究費が破産する。

某大学では長時間計算する場合、最初の 15 分間 (おそらく大部分の計算はこの範囲内で終了するのであろう) は一律の使用料が定められているが、それを超えると使用料が安くなると聞いている。計算機の機種が更新される毎に計算速度は速くなるが、利用者側の計算も高度になるので、計算機能力に対しそれほど期待できなくなるものである。ましてや、ここで行った三次元自由表面波の数値計算のような場合、格子を十分細かくしないと、波は発達しない。もし X、Y、Z 方向の格子間隔を半分にすると容量は 8 倍に増え、陽解法で差分を解く場合格子間隔が小さくなると時間刻み幅も小さくしないと数値安定性が低下するので、例えば時間刻み幅を半分にすると計算時間は約 16 倍になる。このような大容量、且つ長時間を有する計算は通常スーパーコンピュータか、最近高性能化したワークステーションを用い四六時中行われるのかもしれないが、本学情報処理センターの高性能な計算機を有効に利用していきたいものである。そのためにはこのような計算に耐え得る計算環境の充実が必要である。

以上のように差分法による数値計算は金食い虫のような研究である。

6 まとめ

自由表面波を有する数値流体力学の例として、自由表面上を一様速度で航行する圧力分布が造る波の差分法による数値計算について説明した。その結果、本研究で示した計算例は、計算経費節約上、格子間隔が粗く、時間ステップも大きく、さらに改善する余地があると思われるが、粘性を考慮した本計算方法で正確な自由表面の計算が可能であることを確認した。

また、このような大容量の数値計算を長崎大学情報処理センターのような大型計算機で計算するための環境に関する問題点等について記述した。今後、高度な計算を行う予定である。

参考文献

- [1] 小原茂明、仲渡道夫 「自由表面上を航走する圧力分布が造る波の数値計算」 日本造船学会論文集 第 171 号 1992
- [2] 塩谷茂明 「滑走平板が造る波の研究について－Ⅲ」 日本航海学会論文集 第 89 号 1994